Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

6. Mai 2024

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

1 Stunde

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

2224 – 9717

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 24]

Wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar sind, dann ist auch ihr Produkt differenzierbar, und für die beiden Funktionen gilt die Produktregel: $\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

In dieser Frage werden Sie Beispiele für Paare differenzierbarer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ kennenlernen, für die auch $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g'(x)$ gilt.

Betrachten Sie in Teil (a) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$, und $g(x) = x^2$, mit $x \in \mathbb{R}$.

(a) (i) Finden Sie einen Ausdruck für $f'(x)$. [2]

(ii) Zeigen Sie, dass $f'(x)g'(x) = \dfrac{4x}{(2-x)^3}$ gilt. [2]

(iii) Zeigen Sie, dass $f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = \dfrac{4x}{(2-x)^3}$ gilt. [4]

Betrachten Sie in den Teilen (b) und (c) zwei nicht konstante Funktionen, $f(x)$ und $g(x)$, mit $f(x) > 0$ und $g(x) \neq g'(x)$.

(b) Zeigen Sie durch Umstellen der Gleichung $f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = f'(x)g'(x)$, dass $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}$ gilt. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

(c) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit und durch Integration beider Seiten von $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g'(x) - g(x)}$, dass mit einer beliebigen positiven Konstanten A gilt: $f(x) = A\mathrm{e}^{\left(\int \frac{g'(x)}{g'(x)-g(x)} \mathrm{d}x\right)}$. [2]

Mit dem Ergebnis aus Teil (c) lassen sich Paare von Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ finden, welche die folgenden **beiden** Bedingungen erfüllen:

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \text{ und } \left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g'(x).$$

Nutzen Sie für die Teile (d) und (e) das Ergebnis aus Teil (c) mit $A = 1$.

(d) Betrachten Sie $g(x) = x\mathrm{e}^x$.

Finden Sie $f(x)$ so, dass $f(x)$ und $g(x)$ die beiden obigen Gleichungen erfüllen. [5]

(e) Betrachten Sie $g(x) = \sin x + \cos x$.

Finden Sie $f(x)$ so, dass $f(x)$ und $g(x)$ die beiden obigen Gleichungen im Definitionsbereich $0 < x < \pi$ erfüllen.

Geben Sie Ihre Antwort in der Form $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x h(x)}$, wobei $h(x)$ eine noch zu bestimmende Funktion ist. [7]

2. [Maximale Punktzahl: 31]

Bei dieser Frage sollen Sie die Wahrscheinlichkeit finden, mit der Graphen von zufällig erzeugten quadratischen Funktionen eine bestimmte Anzahl von x-Achsenabschnitten aufweisen.

Betrachten Sie in den Teilen (a) – (f) quadratische Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, deren Koeffizienten a, b und c, nacheinander zufällig durch dreimaliges Werfen eines nicht gezinkten sechsseitigen Würfels und Ablesen des Werts auf der obersten Seite des Würfels erhalten werden.

Wenn zum Beispiel nacheinander 2, 3 und 5 geworfen werden, entsteht die quadratische Funktion $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

(a) Erklären Sie, warum mit dieser Methode 216 mögliche quadratische Funktionen erzeugt werden können. [1]

(b) Die Koeffizienten $a = 1$, $b = 4$ und $c = 4$ werden zufällig geworfen, was zur quadratischen Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 4$ führt.

Verifizieren Sie, dass der Graph von f nur eine Schnittstelle mit der x-Achse hat. [2]

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Diskriminante oder auf andere Weise, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Graph einer solchen zufällig erzeugten quadratischen Funktion nur eine Schnittstelle mit der x-Achse hat, $\frac{5}{216}$ beträgt. [6]

Betrachten Sie nun zufällig erzeugte quadratische Funktionen, deren zugehörige Graphen zwei **verschiedene** Schnittstellen mit der x-Achse aufweisen.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Diskriminante die Menge der möglichen Werte von ac. [3]

(e) (i) Zeigen Sie für den Fall $ac = 1$, dass es vier quadratische Funktionen gibt, deren zugehörige Graphen zwei verschiedene Schnittstellen mit der x-Achse aufweisen. [1]

(ii) Zeigen Sie für den Fall $ac = 2$, dass es acht quadratische Funktionen gibt, deren zugehörige Graphen zwei verschiedene Schnittstellen mit der x-Achse aufweisen. [2]

p sei die Wahrscheinlichkeit, dass der Graph einer solchen zufällig erzeugten quadratischen Funktion zwei verschiedene Schnittstellen mit der x-Achse aufweist.

(f) Finden Sie mit Hilfe des Ansatzes aus Teil (e) oder auf andere Weise den Wert von p. [6]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Betrachten Sie in den Teilen (g) und (h) eine zufällig erzeugte quadratische Funktion $f(x) = x^2 + 2Zx + 1$, mit einer stetigen Zufallsvariablen $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

(g) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Graph von f zwei Schnittstellen mit der x-Achse aufweist. [3]

Die stetigen Zufallsvariablen X_1 und X_2, stellen die Schnittstellen mit der x-Achse des Graphen von f dar, wobei $X_1 = -Z - \sqrt{Z^2 - 1}$ und $X_2 = -Z + \sqrt{Z^2 - 1}$ gelten.

(h) Der Graph von f habe die beiden Schnittstellen mit der x-Achse X_1 und X_2. Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl X_1 als auch X_2 größer als $0{,}5$ sind. [7]